Semana 9

- Se sugiere antes de resolver los ejercicios ver los videos de YouTube de los temas correspondientes así como también leer la bibliografía recomendada y el material teórico subido en el campus del curso.
- A continuación se presentan algunos ejercicios resueltos y algunas observaciones para resolver los ejercicios 1 a 8 de la Guía 3. Los ejercicios propuestos que no están en la guía (pero que se relacionan con los mismos) no tienen numeración.

Antes de comenzar con los ejercicios de la semana 9, vamos a repasar algunas definiciones y propiedades que vamos a usar a lo largo de esta semana.

Un *producto interno* en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$ es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{K}$, tal que:

i) Para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ y para cada $x, y, z \in \mathbb{V}$

1. $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
2. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$.

ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, para todo $x, y \in \mathbb{V}$.

iii) $\langle x, x \rangle > 0$ si $x = 0$.

Un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se llama *espacio euclídeo* y lo denotaremos por $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Observar que si $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio euclídeo entonces:

- $\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\langle \lambda y, x \rangle} = \overline{\lambda \langle y, x \rangle} = \overline{\lambda}\ \overline{\langle y, x \rangle} = \overline{\lambda}\ \langle x, y \rangle$,

  donde usamos i.2) y ii) de la definición de producto interno y que si $z, w \in \mathbb{C}$ entonces $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$.
- $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}^+$ y $\langle x, x \rangle = 0$ si y sólo si $x = 0_{\mathbb{V}}$.

  De hecho, $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}^+$ por iii) de la definición de producto interno. También por iii) tenemos que si $\langle x, x \rangle = 0$ entonces $x = 0_{\mathbb{V}}$. Recíprocamente, como $0_{\mathbb{V}} = 0 \cdot 0_{\mathbb{V}}$, por ii), $\langle 0_{\mathbb{V}}, 0_{\mathbb{V}} \rangle = \langle 0 \cdot 0_{\mathbb{V}}, 0_{\mathbb{V}} \rangle = 0 \langle 0_{\mathbb{V}}, 0_{\mathbb{V}} \rangle = 0$.

Veamos algunos ejemplos de funciones que definen productos internos en los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales correspondientes.

Ejercicio : Demostrar que las siguientes funciones defininen productos internos en los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales indicados:

a) $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definida por

$$\langle x, y \rangle = y^* A x,$$

donde $A = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$, define un producto interno en $\mathbb{C}^2$ (visto como $\mathbb{C}$-espacio vectorial).

b) $\langle \cdot, \cdot \rangle : C([0,1],\mathbb{R}) \times C([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\, g(t) dt,$$

define un producto interno en $C([0,1],\mathbb{R})$.

c) $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2),$$

define un producto interno en $\mathbb{R}_2[x]$.

Dem. a): Veamos que la función $\langle \cdot, \cdot \rangle$ cumple con los axiomas del producto interno.

i) Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ y para cada $x, y, z \in \mathbb{C}^2$, tenemos que

1. $\langle x+y, z \rangle = z^*A(x+y) = z^*Ax + z^*Ay = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.
2. $\langle \lambda x, y \rangle = y^*A(\lambda x) = \lambda y^*Ax = \lambda \langle x, y \rangle$.

Observar que los items i).1 y i).2 valen para cualquier matriz A.

ii) Observar que $A^* = \overline{A^T} = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix} = A$. Entonces, para todo $x, y \in \mathbb{C}^2$,

$$\langle x, y \rangle = y^*Ax = y^*A^*x = (x^*Ay)^* = \overline{x^*Ay} = \overline{\langle y, x \rangle}.$$

Donde usamos que como $x^*Ay \in \mathbb{C}$ entonces $(x^*Ay)^T = (x^*Ay)$ y entonces $(x^*Ay)^* = \overline{(x^*Ay)^T} = \overline{(x^*Ay)}$.

iii) Sea $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ entonces

$$\langle x, x \rangle = x^*Ax = [\overline{x_1}\ \overline{x_2}] \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [\overline{x_1}\ \overline{x_2}] \begin{bmatrix} 2x_1 + ix_2 \\ -ix_1 + 2x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= 2\overline{x_1}x_1 + i\overline{x_1}x_2 - i\overline{x_2}x_1 + 2\overline{x_2}x_2 = [\overline{x_1}x_1 + i\overline{x_1}x_2 - i\overline{x_2}x_1 + \overline{x_2}x_2] + \overline{x_1}x_1 + \overline{x_2}x_2 =$$

$$(\overline{x_1 + ix_2})(x_1 + ix_2) + \overline{x_1}x_1 + \overline{x_2}x_2 = |x_1 + ix_2|^2 + |x_1|^2 + |x_2|^2.$$

Entonces, como $|x_1 + ix_2|^2 > 0, |x_1|^2 > 0$ y $|x_2|^2 > 0$, tenemos que $\langle x, x \rangle > 0$, para todo $x \in \mathbb{C}^2$. Además, si $\langle x, x \rangle = 0$. Entonces $|x_1 + ix_2|^2 = 0, |x_1|^2 = 0$ y $|x_2|^2 = 0$, entonces $x_1 = x_2 = 0$. Por lo tanto, $\langle x, x \rangle > 0$ si y sólo si $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y se cumple iii).

b): Veamos que la función $\langle \cdot, \cdot \rangle$ cumple con los axiomas del producto interno.

i) Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ y para cada $f, g, h \in C([0,1],\mathbb{R})$, tenemos que

1. $\langle f+g,h \rangle = \int_0^1 (f+g)(t)\ h(t)dt = \int_0^1 (f(t)+g(t))\ h(t)dt = \int_0^1 (f(t)h(t)+g(t)h(t))dt = \int_0^1 f(t)\ h(t)dt + \int_0^1 g(t)\ h(t)dt = \langle f,h \rangle + \langle g,h \rangle$.
2. $\langle \lambda f,g \rangle = \int_0^1 (\lambda f)(t)\ g(t)dt = \int_0^1 \lambda f(t)\ g(t)dt = \lambda \int_0^1 f(t)\ g(t)dt = \lambda \langle f,g \rangle$.

ii) Para cada $f,g \in C([0,1],\mathbb{R})$, tenemos que

$$\langle f,g \rangle = \int_0^1 f(t)\ g(t)dt = \int_0^1 g(t)\ f(t)dt = \langle g,f \rangle .$$

iii) Sea $f \in C([0,1],\mathbb{R})$, entonces, como $f(t)^2 > 0$ para todo $t \in [0,1]$, se sigue que

$$\langle f,f \rangle = \int_0^1 f(t)^2 dt > 0.$$

Ahora, supongamos que $\langle f,f \rangle = \int_0^1 f(t)^2 dt = 0$. Si $f \neq 0$, entonces existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $f^2(t_0) > 0$. Como f es continua, f^2 también es continua y, por definición de continuidad, como $f^2(t_0) > 0$ existirá un entorno alrededor de t_0 tal que f^2 seguirá siendo positiva en los puntos de ese entorno. Matemáticamente esto se traduce a que, si llamamos $\epsilon := \frac{f(t_0)}{2}$, entonces existe $\delta > 0$ tal que si $|t-t_0| < \delta$ entonces $|f^2(t) - f^2(t_0)| < \epsilon$. Es decir, si $|t-t_0| < \delta$, entonces

$$f^2(t) > f^2(t_0) - \epsilon = \frac{f^2(t_0)}{2}.$$

Entonces

$$\langle f,f \rangle = \int_0^1 f^2(t)dt = \int_0^{t_0-\delta} f^2(t)dt + \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} f^2(t)dt + \int_{t_0+\delta}^1 f^2(t)dt \geq$$

$$\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} f^2(t)dt \geq \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \frac{f^2(t_0)}{2}dt = \frac{f^2(t_0)}{2}(t_0+\delta-(t_0-\delta)) = f^2(t_0)\delta > 0.$$

Lo cual es absurdo, porque $\langle f,f \rangle = 0$. Entonces $\langle f,f \rangle = 0$ si y sólo si $f=0$ o equivalentemente, $\langle f,f \rangle > 0$ si y sólo si $f \neq 0$ y se cumple iii).

$c)$: Veamos que la función $\langle \cdot,\cdot \rangle$ cumple con los axiomas del producto interno.

i) Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ y para cada $p,q,r \in \mathbb{R}_2[x]$ tenemos que

1. $\langle p+q,r \rangle = (p+q)(0)r(0) + (p+q)(1)r(1) + (p+q)(2)r(2) = (p(0)+q(0))r(0) + (p(1)+q(1))r(1) + (p(2)+q(2))r(2) = [p(0)r(0)+p(1)r(1)+p(2)r(2)] + [q(0)r(0)+q(1)r(1)+q(2)r(2)] = \langle p,r \rangle + \langle q,r \rangle$.
2. $\langle \lambda p,q \rangle = (\lambda p)(0)r(0) + (\lambda p)(1)r(1) + (\lambda p)(2)r(2) = \lambda p(0)r(0) + \lambda p(1)r(1) + \lambda p(2)r(2) = \lambda \langle p,q \rangle$.

ii) Para cada $p,q \in \mathbb{R}_2[x]$ tenemos que

$$\langle p,q \rangle = p(0)q(0)+p(1)q(1)+p(2)q(2) = q(0)p(0)+q(1)p(1)+q(2)p(2) = \langle q,p \rangle .$$

iii) Sea $p \in \mathbb{R}_2[x]$ entonces, $\langle p, p \rangle = p(0)^2 + p(1)^2 + p(2)^2 > 0$. Por otra parte, si

$$\langle p, p \rangle = p(0)^2 + p(1)^2 + p(2)^2 = 0,$$

como $p(0)^2 > 0$, $p(1)^2 > 0$ y $p(2)^2 > 0$, tenemos que $p(0) = p(1) = p(2) = 0$. Es decir, el polinomio p tiene 3 raíces. Como $p \in \mathbb{R}_2[x]$, si $p \neq 0$, por el Teorema Fundamental del Álgebra, p tiene 2 raíces, lo cual es absurdo (vimos que p tiene 3 raíces). Entonces $p = 0$.

Por lo tanto $\langle p, p \rangle > 0$ si y sólo si $p \neq 0$ y se cumple iii).

$\square$

Ejercicio : Justificar por qué las siguientes funciones NO definen productos internos.

a) La función $\phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definida por

$$\phi(x, y) = x^* A y,$$

donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

b) La función $\phi : C([0,1], \mathbb{R}) \times C([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(f, g) = \int_0^1 (t-2)\ f(t)\ g(t) dt.$$

c) La función $\phi : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(p)(q) = p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Dem. Observar que las funciones ϕ de los items $a), b)$ y $c)$ cumplen los ítems i.1), i.2) y ii) de la definición de producto interno. El problema va a estar en el hecho de que niguna cumple el item iii).

$a)$: Sea $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$, entonces,

$$\phi(x, x) = [1\ \ -1]^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0,$$

pero $x \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Por lo tanto ϕ no cumple el axioma iii) de los productos internos.

$b)$: Sea $f(t) = 1 \in C([0,1], \mathbb{R})$. Entonces,

$$\phi(f, f) = \int_0^1 (t-2)\ 1 dt = (\frac{t^2}{2} - 2t)|_0^1 = -\frac{3}{2} < 0.$$

Por lo tanto ϕ no cumple el axioma iii) de los productos internos.

$c)$ Sea $p(x) = x(x-1) \in \mathbb{R}_2[x]$, entonces $p(0) = p(1) = 0$. Entonces

$$\phi(p, p) = p(0)^2 + p(1)^2 = 0,$$

pero $p \neq 0$ (el polinomio nulo). Por lo tanto ϕ no cumple el axioma iii) de los productos internos. $\square$

Antes de resolver el **Ejercicio 1**, recodemos la siguiente definición: sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio euclídeo y sea A un conjunto no vacío de $\mathbb{V}$ entonces el *subespacio ortogonal a* A, denotado por $A^\perp$ se define por:

$$A^\perp = \{v \in \mathbb{V} : \langle v, a \rangle = 0 \text{ para todo } a \in A\}.$$

Usando los axiomas de la definición de producto interno es fácil ver que $A^\perp$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ (incluso cuando A es un conjunto cualquiera no vacío que podría no ser un subespacio). Se deja la prueba como ejercicio.

Ejercicio 1: Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{C}$-espacio euclídeo finito dimensional y sea $v_0 \in \mathbb{V} \setminus \{0\}$ un vector arbitrario pero fijo.

a) Comprobar que la aplicación $\phi : \mathbb{V} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\phi(v) := \langle v, v_0 \rangle$$

es una funcional lineal de $\mathbb{V}$. Describir su núcleo e indicar la dimensión del mismo. Observar que

$$\mathbb{V} = Nu(\phi) \oplus gen\{v_0\}.$$

b) Explicar por qué la aplicación $\psi : \mathbb{V} \to \mathbb{C}$ definida por $\psi(v) := \langle v_0, v \rangle$ no es una funcional lineal.

Dem. *a*) : Usando los items i.1) y i.2) de la definición de producto interno, tenemos que, dados $u, v \in \mathbb{V}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\phi(u + v) = \langle u + v, v_0 \rangle = \langle u, v_0 \rangle + \langle v, v_0 \rangle = \phi(u) + \phi(v),$$

$$\phi(\lambda u) = \langle \lambda u, v_0 \rangle = \lambda \langle u, v_0 \rangle = \lambda \phi(u).$$

Por lo tanto ϕ es una funcional lineal de $\mathbb{V}$.

Veamos que $\mathbb{V} = Nu(\phi) \oplus gen\{v_0\}$. Primero, veamos que $Nu(\phi) \cap gen\{v_0\} = \{0_\mathbb{V}\}$. Sea $v \in Nu(\phi) \cap gen\{v_0\}$ entonces, $v \in Nu(\phi)$ y $v \in gen\{v_0\}$. Como $v \in Nu(\phi)$, tenemos que $\phi(v) = 0$ y como $v \in gen\{v_0\}$ tenemos que $v = \alpha v_0$ para cierto $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces

$$0 = \phi(v) = \langle v, v_0 \rangle = \langle \alpha v_0, v_0 \rangle = \alpha \langle v_0, v_0 \rangle.$$

Usando iii) de la definición de producto interno, tenemos que $\langle v_0, v_0 \rangle > 0$, pues $v_0 \neq 0$. Entonces se sigue que $\alpha = 0$, entonces $v = \alpha v_0 = 0 v_0 = 0_\mathbb{V}$, y probamos que $Nu(\phi) \cap gen\{v_0\} = \{0_\mathbb{V}\}$.

Veamos ahora, que $\mathbb{V} = Nu(\phi) \oplus gen\{v_0\}$. Sea $v \in \mathbb{V}$, entonces, como $\phi(v) \in \mathbb{C}$ y $\phi(v_0) \neq 0$, podemos definir el siguiente escalar complejo: $\alpha := \frac{\phi(v)}{\phi(v_0)} \in \mathbb{C}$. Entonces, es fácil ver que

$$v = \alpha v_0 + [v - \alpha v_0].$$

Entonces, usando que ϕ es una funcional lineal y la definición de α, tenemos que

$$\phi(v-\alpha v_0)=\phi(v)-\alpha\phi(v_0)=\phi(v)-\frac{\phi(v)}{\phi(v_0)}\phi(v_0)=0.$$

Por lo tanto, $v-\alpha v_0\in Nu(\phi)$. Entonces $v=v_1+v_2$ con $v_1:=v-\alpha v_0\in Nu(\phi)$ y $v_2:=\alpha v_0\in gen\{v_0\}$. Por lo tanto $v\in Nu(\phi)\oplus gen\{v_0\}$ y se sigue que

$$\mathbb{V}=Nu(\phi)\oplus gen\{v_0\}.$$

Observar que para hacer estas cuentas no usamos que $\mathbb{V}$ es de dimensión finita.

Finalmente, ahora sí, como $\mathbb{V}$ es de dimensión finita, podemos aplicar el Teorema de la dimensón de la suma de subespacios y entonces,

$$\dim(Nu(\phi))=\dim(\mathbb{V})-\dim(gen\{v_0\})=\dim(\mathbb{V})-1.$$

Notar que

$$Nu(\phi)=\{v\in\mathbb{V}:\phi(v)=0\}=\{v\in\mathbb{V}:\langle\, v,v_0\,\rangle=0\}=gen\{v_0\}^{\perp},$$

para la última igualdad usamos la definición de subespacio ortogonal del conjunto $gen\{v_0\}$. Notar que $gen\{v_0\}^{\perp}=\{v\in\mathbb{V}:\langle\, v,v'\,\rangle=0:v'\in gen\{v_0\}\}=\{v\in\mathbb{V}:\langle\, v,\alpha v_0\,\rangle=0:\alpha\in\mathbb{C}\}=\{v\in\mathbb{V}:\langle\, v,v_0\,\rangle=0\}$, meditar por qué vale la última igualdad.

b) Tomemos $i\in\mathbb{C}$, entonces usando los items i.1) y ii) de la definición de producto interno, tenemos que

$$\psi(iv_0)=\langle\, v_0,iv_0\,\rangle=\bar{i}\,\langle\, v_0,v_0\,\rangle=-i\psi(v_0)\neq i\psi(v_0),$$

donde usamos que $\psi(v_0)=\langle\, v_0,v_0\,\rangle>0$ para afirmar que $-i\psi(v_0)\neq i\psi(v_0)$. Por lo tanto, ψ no es una funcional lineal, ya que existe un escalar $\alpha\in\mathbb{C}$ tal que $\psi(\alpha v_0)\neq\alpha\psi(v_0)$. $\square$

Espacios normados y algunas propiedades

Una *norma* en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$ es una función $\|\cdot\|:\mathbb{V}\to\mathbb{R}^+$, tal que:

i) $\|x\|=0$ si y sólo si $x=0_{\mathbb{V}}$.

ii) $\|\lambda x\|=|\lambda|\;\|x\|$, para todo $x\in\mathbb{V},\ \lambda\in\mathbb{C}$.

iii) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$, para todo $x,y\in\mathbb{V}$ (desigualdad triangular).

El par $(\mathbb{V},\|\cdot\|)$ se llama *espacio normado.*
Si $(\mathbb{V},\langle\,\cdot,\cdot\,\rangle)$ es un $\mathbb{K}$-espacio euclídeo, la función

$$\|x\|:=\langle\, x,x\,\rangle^{1/2}$$

define una norma en $\mathbb{V}$. Dicha norma se llama la *norma inducida por el producto interno.*

Se deja como ejercicio verificar que si $(\mathbb{V},\langle\,\cdot,\cdot\,\rangle)$ es un $\mathbb{K}$-espacio euclídeo, la función

$$\|x\|:=\langle\, x,x\,\rangle^{1/2}$$

define una norma en $\mathbb{V}$. Ayuda: para el item iii) usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio euclídeo y $\| \cdot \|$ la norma inducida por el producto interno. Las siguientes propiedades la vamos a usar en lo que resta de la Guía.

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\ Re(\langle u, v \rangle). \tag{1}$$

De hecho, usando los axiomas de la definicón de producto interno, tenemos

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \|u\|^2 + \langle u, v \rangle + \overline{\langle u, v \rangle} + \|v\|^2 =$$

$$= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\ Re(\langle u, v \rangle).$$

Teorema de Pitagoras Si $\langle u, v \rangle = 0$ entonces

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2. \tag{2}$$

La prueba de (2) es inmediata usando que $\langle u, v \rangle = 0$ y la ecuación (1).

Finalmente, si $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un $\mathbb{R}$-espacio euclídeo, la ecuación (1), nos queda

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \langle u, v \rangle . \tag{3}$$

Entonces,

$$\|u-v\|^2 = \|u+(-v)\|^2 = \|u\|^2 + \|-v\|^2 + 2 \langle u, -v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2 \langle u, -v \rangle . \tag{4}$$

Entonces, si hacemos la resta de las ecuaciones (3) y (4), se sigue que:

si $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un $\mathbb{R}$-espacio euclídeo entonces,

$$4 \langle u, v \rangle = \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2. \tag{5}$$

Matriz de Gram, Gramiano y triángulos

Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio euclídeo. Y sea $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$ un conjunto de vectores de $\mathbb{V}$, se llama la *matriz de Gram* y se denota por $G_{\mathcal{X}}$ a

$$G_{\mathcal{X}} := \begin{bmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_r \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_r \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle x_r, x_1 \rangle & \langle x_r, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_r, x_r \rangle \end{bmatrix}.$$

Observar que $G_{\mathcal{X}} \in \mathbb{C}^{r \times r}$. Llamaremos *Gramiano* de $\mathcal{X}$ al determinante de $G_{\mathcal{X}}$.

Antes de resolver el **Ejercicio 3**, recordemos algunas propiedades de la operación *. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ (cuando $n = 1$ tenemos un vector columna), se define

$$A^* = \overline{A^T}.$$

Entonces:

- $(A + B)^* = A^* + B^*,\ A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$.
- $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*,\ A \in \mathbb{C}^{m\times n},\ \alpha \in \mathbb{C}$.
- $(AB)^* = B^* A^*,\ A \in \mathbb{C}^{m\times n}, B \in \mathbb{C}^{n\times m}$.
- $(A^*)^* = A,\ A \in \mathbb{C}^{m\times n}$.
- Si $A \in \mathbb{C}^{1\times 1} = \mathbb{C}$ (es decir A es un escalar) como claramente $A^T = A$, tenemos que $A^* = \overline{A}$.

Si hay alguna duda con alguna de las propiedades se recomienda probarlas.

Ejercicio 3: Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{C}$-espacio euclídeo de dimensión n y sean $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$.

a) Comprobar que $G_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_2, v_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \langle v_n, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_n, v_n \rangle \end{bmatrix}$

es la única matriz de $\mathbb{C}^{n\times n}$ tal que

$$\langle x, y \rangle = ([x]^{\mathcal{B}})^T\ G_{\mathcal{B}}\ \overline{[y]^{\mathcal{B}}} = ([y]^{\mathcal{B}})^*\ G_{\mathcal{B}}^T\ [x]^{\mathcal{B}},$$

para todo $x, y \in \mathbb{V}$.

b) Comprobar que si $\mathcal{B}' = \{v_1', v_2', \cdots, v_n'\}$ es otra base de $\mathbb{V}$ vale que

$$G_{\mathcal{B}'} = (M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}})^T\ G_{\mathcal{B}}\ \overline{M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}},$$

donde $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ es la matriz de cambio de coordenadas de las bases $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Dem. $a)$: Sean $x, y \in \mathbb{V}$. Como $\mathcal{B}$ es una base $\mathbb{V}$, entonces $x = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$, para ciertos $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$ y $y = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n$, para ciertos $b_1, b_2, \cdots, b_n \in \mathbb{C}$. Entonces, es claro que

$$[x]^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},\ [y]^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Usando los items i.1), i.2) y ii) de la definición de producto interno, tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle\, x, y \,\rangle &= \langle\, a_1v_1 + \cdots + a_nv_n, b_1v_1 + \cdots + b_nv_n \,\rangle \\
&= a_1\overline{b_1} \langle\, v_1, v_1 \,\rangle + \cdots + a_1\overline{b_n} \langle\, v_1, v_n \,\rangle + \cdots + a_n\overline{b_1} \langle\, v_n, v_1 \,\rangle + \cdots + a_n\overline{b_n} \langle\, v_n, v_n \,\rangle \\
&= a_1[\langle\, v_1, v_1 \,\rangle \ \cdots \ \langle\, v_1, v_n \,\rangle] \begin{bmatrix} \overline{b_1} \\ \overline{b_2} \\ \vdots \\ \overline{b_n} \end{bmatrix} + \cdots + a_n[\langle\, v_n, v_1 \,\rangle \ \cdots \ \langle\, v_n, v_n \,\rangle] \begin{bmatrix} \overline{b_1} \\ \overline{b_2} \\ \vdots \\ \overline{b_n} \end{bmatrix} \\
&= [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n] \ G_{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} \overline{b_1} \\ \overline{b_2} \\ \vdots \\ \overline{b_n} \end{bmatrix} = ([x]^{\mathcal{B}})^T \ G_{\mathcal{B}} \ \overline{[y]^{\mathcal{B}}}.
\end{aligned}$$

Por último, como $\langle\, x, y \,\rangle = [([x]^{\mathcal{B}})^T \ G_{\mathcal{B}} \ \overline{[y]^{\mathcal{B}}}] \in \mathbb{C}$ arriba vimos que $[([x]^{\mathcal{B}})^T \ G_{\mathcal{B}} \ \overline{[y]^{\mathcal{B}}}]^T = [([x]^{\mathcal{B}})^T \ G_{\mathcal{B}} \ \overline{[y]^{\mathcal{B}}}]$. Entonces, tenemos que

$$\langle\, x, y \,\rangle = ([x]^{\mathcal{B}})^T \ G_{\mathcal{B}} \ \overline{[y]^{\mathcal{B}}} = [([x]^{\mathcal{B}})^T \ G_{\mathcal{B}} \ \overline{[y]^{\mathcal{B}}}]^T = \overline{[y]^{\mathcal{B}}}^T G_{\mathcal{B}}^T \ ((([x]^{\mathcal{B}})^T)^T = ([y]^{\mathcal{B}})^* \ G_{\mathcal{B}}^T \ [x]^{\mathcal{B}}.$$

Veamos que $G_{\mathcal{B}}$ es única. Supongamos que existe otra matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que

$$\langle\, x, y \,\rangle = ([x]^{\mathcal{B}})^T \ G_{\mathcal{B}} \ \overline{[y]^{\mathcal{B}}} = ([x]^{\mathcal{B}})^T \ A \ \overline{[y]^{\mathcal{B}}}.$$

Entonces tomemos $x = y = v_1$, entonces, es claro que $[x]^{\mathcal{B}} = [y]^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = e_1$ (el primer vector de la base canónica de $\mathbb{C}^n$). Entonces,

$$e_1^T \ G_{\mathcal{B}} \ e_1 = (G_{\mathcal{B}})_{11} = e_1^T \ A \ e_1 = A_{11}.$$

Es decir el lugar $(1, 1)$ de A y $G_{\mathcal{B}}$ coinciden.

Siguiendo con esa idea, tomemos $x = v_i$ e $y = v_j$ con $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ y $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Entonces $[x]^{\mathcal{B}} = e_i$ y $[y]^{\mathcal{B}} = e_j$ (los vectores i-ésimos y j-ésimos de la base canónica de $\mathbb{C}^n$). Entonces

$$e_i^T \ G_{\mathcal{B}} \ e_j = (G_{\mathcal{B}})_{ij} = e_i^T \ A \ e_j = A_{ij}.$$

Por lo tanto, el lugar (i, j) de A y $G_{\mathcal{B}}$ coinciden para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ y $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Entonces $A = G_{\mathcal{B}}$ como queríamos ver.

b) : Recordar que $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores $v_1', v_2', \cdots, v_n'$ en la base $\mathcal{B}$, es decir

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = [\ [v_1']^{\mathcal{B}} \ [v_2']^{\mathcal{B}} \cdots \ [v_n']^{\mathcal{B}}\ ].$$

Es fácil verificar que

$$(M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}})^T = \begin{bmatrix} ([v_1']^{\mathcal{B}})^T \\ ([v_2']^{\mathcal{B}})^T \\ \vdots \\ ([v_n']^{\mathcal{B}})^T \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$(M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}})^T \; G_{\mathcal{B}} \; \overline{M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} ([v_1']^{\mathcal{B}})^T \\ ([v_2']^{\mathcal{B}})^T \\ \vdots \\ ([v_n']^{\mathcal{B}})^T \end{bmatrix} \; G_{\mathcal{B}} \; [\; \overline{[v_1']^{\mathcal{B}}} \; \overline{[v_2']^{\mathcal{B}}} \cdots \; \overline{[v_n']^{\mathcal{B}}} \;] =$$

$$= \begin{bmatrix} ([v_1']^{\mathcal{B}})^T \; G_{\mathcal{B}} \; \overline{[v_1']^{\mathcal{B}}} & ([v_1']^{\mathcal{B}})^T \; G_{\mathcal{B}} \; \overline{[v_2']^{\mathcal{B}}} & \cdots & ([v_1']^{\mathcal{B}})^T \; G_{\mathcal{B}} \; \overline{[v_n']^{\mathcal{B}}} \\ ([v_2']^{\mathcal{B}})^T \; G_{\mathcal{B}} \; \overline{[v_1']^{\mathcal{B}}} & ([v_2']^{\mathcal{B}})^T \; G_{\mathcal{B}} \; \overline{[v_2']^{\mathcal{B}}} & \cdots & ([v_2']^{\mathcal{B}})^T \; G_{\mathcal{B}} \; \overline{[v_n']^{\mathcal{B}}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ([v_n']^{\mathcal{B}})^T \; G_{\mathcal{B}} \; \overline{[v_1']^{\mathcal{B}}} & ([v_n']^{\mathcal{B}})^T \; G_{\mathcal{B}} \; \overline{[v_2']^{\mathcal{B}}} & \cdots & ([v_n']^{\mathcal{B}})^T \; G_{\mathcal{B}} \; \overline{[v_n']^{\mathcal{B}}} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \langle v_1', v_1' \rangle & \langle v_1', v_2' \rangle & \cdots & \langle v_1', v_n' \rangle \\ \langle v_2', v_1' \rangle & \langle v_2', v_2' \rangle & \cdots & \langle v_2', v_n' \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle v_n', v_1' \rangle & \langle v_n' v_2' \rangle & \cdots & \langle v_n', v_n' \rangle \end{bmatrix} = G_{\mathcal{B}'},$$

donde, usamos que por el item a), vale que

$$\langle v_i', v_j' \rangle = ([v_i']^{\mathcal{B}})^T \; G_{\mathcal{B}} \; \overline{[v_j']^{\mathcal{B}}},$$

para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ y $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

$\square$

A partir del ejercicio anterior podemos afirmar que

La matriz de Gram de una base $\mathcal{B}$ determina unívocamente al producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. En este caso, llamamos a $G_{\mathcal{B}}$ la *matriz del producto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *en la base* $\mathcal{B}$.

La siguiente propiedad la vamos a usar para resolver el **Ejercicio 6** y tiene interés en sí misma.

Proposición 1. *Sea* $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un* $\mathbb{K}$*-espacio euclídeo de dimensión finita y* $\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$ *un conjunto de vectores de* $\mathbb{V}$*. Entonces*

$$\{x_1, x_2, \cdots, x_r\} \text{ es LD si y sólo si } \det(G_{\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}}) = 0.$$

Es decir el Gramiano es nulo.

Antes de comenzar con la demostración, veamos una manera conveniente de escribir la matriz $G_{\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}}$.

Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{V}$. Es decir $\|v_i\| = 1$ para todo $i = 1, 2 \cdots, n$ y $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ para todo $i \neq j$. Entonces, tenemos que $G_{\mathcal{B}} = I_{n \times n}$ (comprobarlo) y, por el **Ejercicio 3 a)**,

$$\langle x_i, x_j \rangle = ([x_j]^{\mathcal{B}})^* G_{\mathcal{B}}^T \ [x_i]^{\mathcal{B}} = ([x_j]^{\mathcal{B}})^* \ [x_i]^{\mathcal{B}},$$

para todo $i = 1, 2, \cdots, r$ y $j = 1, 2, \cdots, r$. Sea

$$A := [[\ x_1]^{\mathcal{B}} \ [x_2]^{\mathcal{B}} \ \cdots [x_r]^{\mathcal{B}} \ ] \in \mathbb{C}^{n \times r},$$

la matriz que resulta de poner en sus columnas las coordenadas en base $\mathcal{B}$ de los vectores $x_1, x_2, \cdots, x_r$. Entonces, observar que

$$G_{\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}}^T = \begin{bmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_2, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_r, x_1 \rangle \\ \langle x_1, x_2 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_r, x_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle x_1, x_r \rangle & \langle x_2, x_r \rangle & \cdots & \langle x_r, x_r \rangle \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} ([x_1]^{\mathcal{B}})^* \ [x_1]^{\mathcal{B}} & ([x_1]^{\mathcal{B}})^* \ [x_2]^{\mathcal{B}} & \cdots & ([x_1]^{\mathcal{B}})^* \ [x_r]^{\mathcal{B}} \\ ([x_2]^{\mathcal{B}})^* \ [x_1]^{\mathcal{B}} & ([x_2]^{\mathcal{B}})^* \ [x_2]^{\mathcal{B}} & \cdots & ([x_2]^{\mathcal{B}})^* \ [x_r]^{\mathcal{B}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ([x_r]^{\mathcal{B}})^* \ [x_1]^{\mathcal{B}} & ([x_r]^{\mathcal{B}})^* \ [x_2]^{\mathcal{B}} & \cdots & ([x_r^{\mathcal{B}})^* \ [x_r]^{\mathcal{B}} \end{bmatrix} = A^* A.$$

Ahora sí vamos a demostar la Proposición.

Dem. Supongamos que $\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$ es un conjunto LD de $\mathbb{V}$. Entonces, por definición de independencia lineal, existen escalares $a_1, a_2, \cdots, a_r \in \mathbb{K}$ no todos nulos, tales que

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_r x_r = 0_{\mathbb{V}}.$$

Sea $z := [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_r]^T \neq 0_{\mathbb{K}^r}$. Entonces, tenemos que

$$Az = [[\ x_1]^{\mathcal{B}} \ [x_2]^{\mathcal{B}} \ \cdots [x_r]^{\mathcal{B}} \ ] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_4 \end{bmatrix} = a_1 [x_1]^{\mathcal{B}} + a_2 [x_2]^{\mathcal{B}} + \cdots + a_r [x_r]^{\mathcal{B}} =$$

$$= [a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_r x_r]^{\mathcal{B}} = [0_{\mathbb{V}}]^{\mathcal{B}} = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

Entonces

$$G_{\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}}^T z = A^* A z = A^* 0_{\mathbb{K}^n} = 0_{\mathbb{K}^r}.$$

Por lo tanto $z \in nul(G_{\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}}^T)$. Entonces como $z \neq 0_{\mathbb{K}^r}$, se sigue que $\dim(nul(G_{\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}}^T)) > 0$ o, usando el Teorema de la dimensión, se sigue que $rg(G_{\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}}^T) < r$. Por lo tanto, $G_{\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}}^T$ es una matriz de $r \times r$ cuyo rango no es completo, entonces $\det(G_{\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}}^T) = 0$. Finalmente como el determinante de una matriz y el determinante de su transpuesta coinciden, tenemos $\det(G_{\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}}) = \det(G_{\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}}^T) = 0$.

Recíprocamente, si $\det(G_{\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}}) = 0$, entonces $\det(G^T_{\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}}) = \det(G_{\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}}) = 0$. Entonces, existe un vector no nulo $z = [z_1\ z_2 \cdots\ z_r]^T \in \mathbb{K}^r$ tal que

$$G^T_{\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}} z = A^*Az = 0_{\mathbb{K}^r}.$$

Entonces,

$$z^*A^*Az = z^*0_{\mathbb{K}^r} = 0.$$

Observar que $z^*A^*Az = (Az)^*(Az) = \|Az\|_{pic}$, donde $\|\cdot\|_{pic}$ denota el producto interno canónico de $\mathbb{K}^n$. Entonces,

$$\|Az\|_{pic} = 0.$$

Por lo tanto, $Az = 0_{\mathbb{K}^n}$, entonces

$$0_{\mathbb{K}^n} = Az = z_1[x_1]^{\mathcal{B}} + z_2[x_2]^{\mathcal{B}} + \cdots + z_r[x_r]^{\mathcal{B}} = [z_1x_1 + z_2x_2 + \cdots + z_rx_r]^{\mathcal{B}}.$$

Entonces,

$$z_1x_1 + z_2x_2 + \cdots + z_rx_r = 0_{\mathbb{V}},$$

y como $z_1, z_2, \cdots, z_r \in \mathbb{K}$ son escalares no todos nulos, se sigue que $\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$ es un conjunto LD de $\mathbb{V}$. □

De la Proposición 1 es imediato ver que: si $(\mathbb{V}, \langle\,\cdot,\cdot\,\rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio euclídeo de dimensión finita y $\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$ un conjunto de vectores de $\mathbb{V}$. Entonces

$$\{x_1, x_2, \cdots, x_r\} \text{ es LI si y sólo si } \det(G_{\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}}) \neq 0.$$

Notación para triángulos

Sea $(\mathbb{V}, \langle\,\cdot,\cdot\,\rangle)$ un $\mathbb{R}$-espacio euclídeo, se define el *ángulo θ entre dos vectores no nulos x e y* mediante la fórmula

$$\cos\theta := \frac{\langle\, x, y\,\rangle}{\|x\|\ \|y\|}.$$

Sean $u, v, w \in \mathbb{V}$ (3 puntos no alineados) en el $\mathbb{R}$-espacio euclídeo $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, el siguiente es el triangulo de vértices u, v, w :

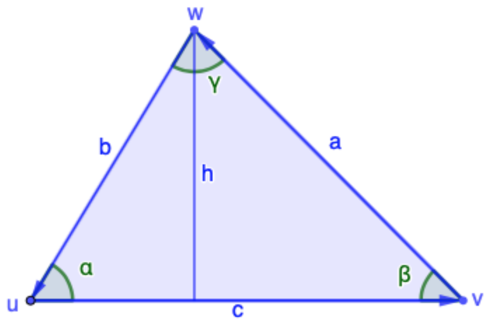

Figura 1: Notación triangulo.

Con la notación de la Figura 1, se sigue que:

$$c = v - u, \ a = w - v, \ b = u - w.$$

Como u, v, w son puntos no alineados, se sigue que $a, b, c \neq 0_{\mathbb{V}}$. Entonces, podemos considerar los vectores normalizados:

$$\tilde{a} = \frac{a}{\|a\|}, \quad \tilde{b} = \frac{b}{\|b\|}, \quad \tilde{c} = \frac{c}{\|c\|}.$$

Comprobar que $\|\tilde{a}\| = \|\tilde{b}\| = \|\tilde{c}\| = 1$. En cuánto a los ángulos interiores del triángulo, tenemos que:

$$\cos\alpha = \frac{\langle c, -b \rangle}{\|c\| \|b\|} = \left\langle \frac{c}{\|c\|}, \frac{-b}{\|b\|} \right\rangle = \left\langle \tilde{c}, -\tilde{b} \right\rangle,$$

donde usamos i.2) de la definición de producto interno. De la misma manera,

$$\cos\beta = \frac{\langle a, -c \rangle}{\|a\| \|c\|} = \langle \tilde{a}, -\tilde{c} \rangle, \quad \cos\gamma = \frac{\langle -a, b \rangle}{\|a\| \|b\|} = \left\langle -\tilde{a}, \tilde{b} \right\rangle.$$

Para obtener los ángulos interiores del triángulo, observar los signos que usamos en las fórmulas de los ángulos.

La altura del triángulo se obtiene como

$$\|h\| = \|b\| \sin(\alpha).$$

Finalmente recordemos las siguientes identidades trigonómetricas: sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces

- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$,
- $\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$.

Ejercicio 6 : Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Sean v_1, v_2 dos vectores linealmente independientes. Demostrar que la suma de los ángulos internos del triángulo de vertices $0, v_1, v_2$ es π.

Dem. Con la notación de la Figura 1, tenemos que $u = 0_{\mathbb{V}}, v = v_1,\ w = v_2$, entonces $c = v_1,\ a = v_2 - v_1,\ b = -v_2$. Entonces,

$$a + b + c = v_2 - v_1 - v_2 + v_1 = 0_{\mathbb{V}},$$

entonces el conjunto $\{a, b, c\}$ es linealmente dependiente en $\mathbb{V}$ y por lo tanto, por la Proposición 1, su Gramiano se anula, es decir

$$\det G_{\{a,b,c\}} = \det \begin{bmatrix} \|a\|^2 & \langle a, b \rangle & \langle a, c \rangle \\ \langle b, a \rangle & \|b\|^2 & \langle b, c \rangle \\ \langle c, a \rangle & \langle c, b \rangle & \|c\|^2 \end{bmatrix} = 0.$$

Desarrollando el determinante por la primera columna, operando y usando que como estamos en un $\mathbb{R}$-espacio vectorial el producto interno es simétrico, tenemos que

$$\|a\|^2\|b\|^2\|c\|^2 - \|a\|^2 \langle b, c \rangle^2 - \langle a, b \rangle^2 \|c\|^2 - \langle a, c \rangle \|b\|^2 + 2 \langle b, c \rangle \langle a, b \rangle \langle a, c \rangle = 0.$$

Ahora, si dividimos la expresión anterior por $\|a\|^2\|b\|^2\|c\|^2 \neq 0$ y normalizamos los vectores, nos queda:

$$1 - \left\langle \tilde{b}, \tilde{c} \right\rangle^2 - \left\langle \tilde{a}, \tilde{b} \right\rangle^2 - \langle \tilde{a}, \tilde{c} \rangle^2 + 2 \left\langle \tilde{b}, \tilde{c} \right\rangle \left\langle \tilde{a}, \tilde{b} \right\rangle \langle \tilde{a}, \tilde{c} \rangle = 0.$$

Entonces $(1 - \left\langle \tilde{b}, \tilde{c} \right\rangle^2)(1 - \left\langle \tilde{a}, \tilde{b} \right\rangle^2) - \left\langle \tilde{b}, \tilde{c} \right\rangle^2 \left\langle \tilde{a}, \tilde{b} \right\rangle^2 = \langle \tilde{a}, \tilde{c} \rangle^2 - 2 \left\langle \tilde{b}, \tilde{c} \right\rangle \left\langle \tilde{a}, \tilde{b} \right\rangle \langle \tilde{a}, \tilde{c} \rangle$.

Entonces, $(1 - \left\langle \tilde{b}, \tilde{c} \right\rangle^2)(1 - \left\langle \tilde{a}, \tilde{b} \right\rangle^2) = \left\langle \tilde{b}, \tilde{c} \right\rangle^2 \left\langle \tilde{a}, \tilde{b} \right\rangle^2 + \langle \tilde{a}, \tilde{c} \rangle^2 - 2 \left\langle \tilde{b}, \tilde{c} \right\rangle \left\langle \tilde{a}, \tilde{b} \right\rangle \langle \tilde{a}, \tilde{c} \rangle = (- \langle \tilde{a}, \tilde{c} \rangle + \left\langle \tilde{b}, \tilde{c} \right\rangle \left\langle \tilde{a}, \tilde{b} \right\rangle)^2$. Tomando raíz cuadrada a ambos lados, obtenemos

$$\sqrt{1 - \left\langle \tilde{b}, \tilde{c} \right\rangle^2} \sqrt{1 - \left\langle \tilde{a}, \tilde{b} \right\rangle^2} = | - \langle \tilde{a}, \tilde{c} \rangle + \left\langle \tilde{b}, \tilde{c} \right\rangle \left\langle \tilde{a}, \tilde{b} \right\rangle |.$$

Recordemos que: $\cos\alpha = \left\langle \tilde{c}, -\tilde{b} \right\rangle$, entonces $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos\alpha^2} = \sqrt{1 - \left\langle \tilde{c}, \tilde{b} \right\rangle^2}$. De la misma manera, tenemos que $\cos\beta = \langle \tilde{a}, -\tilde{c} \rangle$, $\sin\beta = \sqrt{1 - \langle \tilde{a}, \tilde{c} \rangle^2}$, $\cos\gamma = \left\langle -\tilde{a}, \tilde{b} \right\rangle$, $\sin\gamma = \sqrt{1 - \left\langle \tilde{a}, \tilde{b} \right\rangle^2}$.

Entonces, reemplazando en la ecuación anterior por las expresiones de los cosenos y senos de los ángulos correspondientes, nos queda:

$$\sin\alpha \sin\gamma = |\cos\beta + \cos\alpha \cos\gamma| = \cos\beta + \cos\alpha \cos\gamma,$$

donde usamos que como $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \frac{\pi}{2}]$ el coseno es mayor o igual a 0 y podemos eliminar el módulo. Entonces, pasando de término, nos queda

$$-\cos\beta = \cos(\pi-\beta) = \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma = \cos(\alpha+\gamma).$$

Como en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ el coseno es biyectivo, se sigue que

$$\pi - \beta = \alpha + \gamma, \text{ entonces } \alpha+\beta+\gamma = \pi$$

y probamos lo que queríamos. $\square$

Ejercicio 8: Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{R}$-espacio euclídeo de dimensión 3 y sea

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\} \subset \{u \in \mathbb{V} : \|u\| = 1\},$$

una base de $\mathbb{V}$ tal que $\|u_i + u_j\|^2 = 2 + \sqrt{3}$ y $\|u_i - u_j\|^2 = 2 - \sqrt{3}$ para $i \neq j$.

a) Hallar la matriz del producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en la base $\mathcal{B}$.

b) Hallar $\Theta := [\, \arccos(\langle u_i, u_j \rangle)]_{i\in\{1,2,3\}, j\in\{1,2,3\}}$.

c) Calcular al área del triangulo de vértices, u_1, u_2, u_3.

d) Determinar los vértices de un triángulo rectángulo T tal que $T \subset gen\{u_1, u_2\}$ y cuyos catetos midan 3 y 4.

Dem. $a)$: Vamos a calcular la matriz

$$G_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \|u_1\|^2 & \langle u_1, u_2 \rangle & \langle u_1, u_3 \rangle \\ \langle u_2, u_1 \rangle & \|u_2\|^2 & \langle u_2, u_3 \rangle \\ \langle u_3, u_1 \rangle & \langle u_3, u_2 \rangle & \|u_3\|^2 \end{bmatrix}.$$

Como $u_1, u_2, u_3 \in \{u \in \mathbb{V} : \|u\| = 1\}$, entonces $\|u_1\| = \|u_2\| = \|u_3\| = 1$.

Como estamos es un $\mathbb{R}$-espacio euclídeo podemos usar la ecuación (5). Entonces, si $i \neq j$,

$$\langle u_i, u_j \rangle = \frac{\|u_i + v_j\|^2 - \|u_i - v_j\|^2}{4} = \frac{2+\sqrt{3} - (2-\sqrt{3})}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por lo tanto

$$G_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

$b)$: Como $\arccos(1) = 0$ y $\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{6}$, tenemos que

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{6} \\ \frac{\pi}{6} & 0 & \frac{\pi}{6} \\ \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{6} & 0 \end{bmatrix}.$$

$c)$: Con la notación de la Figura 1, tenemos que $u = u_1$, $v = u_2$, $w = u_3$. Entonces

$$c = v - u = u_2 - u_1, \; b = u - w = u_1 - u_3.$$

Entonces $\|c\|^2 = \|u_2 - u_1\|^2 = 2 - \sqrt{3}$, $\|b\|^2 = \|u_1 - u_3\|^2 = 2 - \sqrt{3}$ y $\langle c, b \rangle = \langle u_2 - u_1, u_1 - u_3 \rangle = \langle u_2, u_1 \rangle - \langle u_2, u_3 \rangle - \|u_1\|^2 + \langle u_1, u_3 \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}-2}{2}$. Entonces,

$$\cos(\alpha)^2 = \frac{\langle c, -b \rangle^2}{\|c\|^2 \; \|b\|^2} = \frac{(\frac{2-\sqrt{3}}{2})^2}{(2-\sqrt{3})^2} = \frac{1}{4}.$$

Entonces

$$\sin(\alpha) = \sqrt{(1 - \cos(\alpha)^2)} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por lo tanto, $Area_T = \|c\| \frac{\|h\|}{2} = \|c\| \frac{\|b\| \sin(\alpha)}{2} = \sqrt{(2-\sqrt{3})}\sqrt{(2-\sqrt{3})}\frac{\sqrt{3}}{4} = (2-\sqrt{3})\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}$.

d) : Con la notación de la Figura 1, buscamos un triangulo de vértices $u, v, w \in \mathbb{V}$ tales que $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (triángulo rectángulo) $u, v, w \in gen\{u_1, u_2\}$ y los catetos que son c y b midan 3 y 4 respectivamente, es decir $\|c\| = \|v - u\| = 3$, $\|b\| = \|u - w\| = 4$, y $0 = \langle c, -b \rangle = \langle v - u, w - u \rangle$. Como nos piden un triángulo (es decir no tenemos que hallar todos los triángulos que cumplen lo anterior), para simplificar cuentas, podemos suponer que $u = 0_{\mathbb{V}}$, $v = z_0 u_1$, para cierto $z_0 \in \mathbb{R}$ y $w = z_1 u_1 + z_1 u_2$, para ciertos $z_1, z_1 \in \mathbb{R}$. Entonces, como $u, v, w \in gen\{u_1, u_2\}$ el triángulo T con esos vértices cumple $T \subset gen\{u_1, u_2\}$.

Vamos a obtener los escalares $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ para que T quede totalmente definido. Para eso vamos a usar los datos:

$$3 = \|c\| = \|v - u\| = \|z_0 u_1\| = |z_0| \|u_1\| = |z_0|.$$

Tomamos $z_0 = 3$ (podríamos haber tomado también $z_0 = -3$). Entonces

$$0 = \langle c, b \rangle = \langle v, w \rangle = \langle 3u_1, z_1 u_1 + z_2 u_2 \rangle = 3z_1 \langle u_1, u_1 \rangle + 3z_2 \langle u_1, u_2 \rangle = 3z_1 + 3z_2 \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Entonces $z_1 = -z_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$. Entonces, usando que

$$16 = \|b\|^2 = \|u - w\|^2 = \|z_1 u_2 + z_2 u_3\|^2 = z_1^2 \|u_1\|^2 + z_2^2 \|u_2\|^2 + 2 z_1 z_2 \langle u_2, u_3 \rangle =$$

$$= z_1^2 + z_2^2 + z_1 z_2 \sqrt{3}.$$

Reemplazando $z_1 = -z_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$, nos queda que

$$16 = z_2^2 \frac{3}{4} + z_2^2 - z_2^2 \frac{3}{2} = \frac{1}{4} z_2^2.$$

Entonces $|z_2| = \sqrt{64} = 8$. Tomamos $z_2 = 8$ y entonces $z_1 = -8\frac{\sqrt{3}}{2} = -4\sqrt{3}$.

Entonces, el triangulo T de vértices $u = 0_{\mathbb{V}}$, $v = 3u_1$ y $w = -4\sqrt{3}u_1 + 8u_2$, cumple con lo pedido. $\square$